Uitwerkingen Calculus 2 tentamen d.d. 16 april 2007

Keimpe Nevenzeel

1. Laat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks met reële termen zijn.

a. Bewijs: als de reeks convergent is, dan geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zie het bewijs van theorema 11.2.6, pg. 718.

b. Geef (zonder bewijs) een voorbeeld van een reeks die niet convergeert, alhoewel de algemene term a_n wel naar 0 gaat voor $n \to \infty$.

Voorbeeld: $a_n = n^{-1}$.

c. Vul de volgende definitie aan:
De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heet absoluut convergent als …

de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeert.

d. Om na te gaan of een gegeven reeks absoluut convergent is, kunnen we de ratio test gebruiken. Formuleer deze test.

Zie de test op pg. 742.

2. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^2+1}$$

a. Bepaal de convergentiestraal R.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(n+1)(x-4)^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{n(x-4)^n}{n^2+1}}\right| = \left|\frac{(x-4)^{n+1}}{(x-4)^n}\cdot\frac{\dfrac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{n}{n^2+1}}\right| = |x-4|\left|\frac{(n+1)(n^2+1)}{\left[(n+1)^2+1\right]n}\right| = |x-4|\left|\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n}\right|$$

Als we boven en onderkant van de breuk delen door n^3 krijgen we:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-4|\left|\frac{1+n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}}{1+2n^{-1}+2n^{-2}}\right| = |x-4| \text{ voor } n\to\infty.$$

Volgens de Ratio Test geldt als $|x-4|<1$ dan is er convergentie en als $|x-4|>1$ dan is er divergentie $\Rightarrow$ de Radius of Convergence is 1.

b. Bepaal alle (reële) x waarvoor de bovenstaande machtreeks convergeert.

Als $|x-4|<1$ convergeert de reeks sowieso, dat is dus voor $x\in(3,5)$. Nu moeten we nog bepalen of de eindpunten ook convergeren.

Als $x=3$ dan krijgen we de reeks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$. Dit is een Alternerende Reeks, dus we gebruiken de Alternating Series Test. Definieer $b_n = \frac{n}{n^2+1}$, dan

(i) Moeten we controleren of $b_n > b_{n+1}$.

$$n < n+1$$
$$\frac{n^2}{n} < \frac{(n+1)^2}{n+1}$$
$$\frac{n^2+1}{n} < \frac{(n+1)^2+1}{n+1}$$
$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$
$$b_n > b_{n+1}$$

Aan dit criterium is dus inderdaad voldaan.

(ii) Moet $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0.$$

Aan beide criteria wordt voldaan, dus voor $x = 3$ convergeert de reeks.

Als $x = 5$ dan krijgen we de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

We gebruiken de Limit Comparison Test om te bepalen of deze reeks convergeert.

Definieer $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ en $b_n = \frac{1}{n}$, dan:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n/(n^2+1)}{1/n} = \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+n^{-2}} \to 1 \text{ voor } n \to \infty.$$

$1 > 0$, dus volgens de Limit Comparison Test moeten *of* a_n en b_n beiden convergeren *of* a_n en b_n moeten beiden divergeren.

We weten dat $b_n = n^{-1}$ divergeert, dus $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ moet ook divergeren.

Dus voor $x \in [3,5)$ convergeert de reeks.

c. Voor $|x-4| < R$ duiden we de som van de machtreeks aan door $f(x)$. Bereken $f'(4)$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^2+1}$. Hieruit volgt:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{n(x-4)^n}{n^2+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-4)^{n-1}}{n^2+1} = c_1 + c_2(x-4) + c_3(x-4)^2 + \ldots$$

Merk op dat bij differentiatie de 0de term wegvalt omdat dit een constante is.

Als $x = 4$, dan $x - 4 = 0$. Dus we krijgen: $\frac{df(4)}{dx} = c_1 + c_2(4-4) + c_3(4-4)^2 + \ldots = c_1 = \frac{1}{2}$.

3. De functie *f* wordt gegeven door

$$f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

waarbij $(x,y)\neq(0,0)$**.**

a. Toon aan dat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **niet bestaat.**

Als $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat dan moet de waarde van deze limiet niet afhangen van het pad dat je kiest om de limiet te benaderen. In anderen woorden: elk pad moet hetzelfde antwoord opleveren.

Eerst benaderen we de limiet over de *y*-as (dus $x=0$):

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y)=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{0}{0+y^2}=0.$$

Vervolgens benaderen we de limiet over de *x*-as (dus $y=0$):

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0)=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+0}=1.$$

Voor beide paden krijgen we een andere limietwaarde, dus de limiet bestaat niet.

b. Bereken de partiele afgeleiden f_x **en** f_y **(voor** $(x,y)\neq(0,0)$**).**

$f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, dus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2)-x^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

c. en d. behoren niet tot de leerstof dit jaar.

4. Opgave 4 behoort niet tot de leerstof dit jaar.

5. Zie voor de uitwerking voorbeeld 3 van paragraaf 15.9, pg. 1046.

6.a Los op: $y''(x)+3y'(x)+2y(x)=0$

Dit is een homogene differentiaalvergelijking. Om deze op te lossen bepalen we eerst de discriminant. We zien dat $(a,b,c)=(1,3,2)$, dus $D=b^2-4ac=9-8=1>0$.

De discriminant is groter dan 0, dus de algemene oplossing wordt gegeven door:

$$y(x)=c_1e^{r_1\cdot x}+c_2e^{r_2\cdot x}$$

Waarbij r_1 en r_2 gegeven worden door:

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm D}{2a}=\frac{-3\pm 1}{2\cdot 1}=\begin{cases}-1\\-2\end{cases}.$$

Dus $y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$.

6.b Idem, $y''+3y'+2y=2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
Dit is een inhomogene differentiaalvergelijking. De oplossing van een inhomogene differentiaalvergelijking is de som van oplossing de homogene differentiaalvergelijking $y_h(x)$ en een inhomogene oplossing $y_p(x)$.

De oplossing van de homogene vergelijking hebben we bepaald bij deel a van de opgave.

We gebruiken de Methode van Onbepaalde Coëfficiënten om tot een particuliere oplossing te komen. Stel $y_p = Ax+B$, dan $y_p' = A$ en $y_p'' = 0$.

Als we dit invullen in de differentiaalvergelijking krijgen we:

$$y''+3y'+2y = 0+3A+2(Ax+B) = 3A+2B+2Ax = 2x$$

Hieruit volgt: $\begin{cases} 2Ax = 2x \\ 3A+2B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=1$ en $B=-\frac{3}{2}$.

Dus $y_p(x) = x-\frac{3}{2}$ en dus $y(x) = y_h(x)+y_p(x) = c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+x-\frac{3}{2}$.

Uit de beginvoorwaarden $y(0)=0$ en $y'(0)=1$ volgt dat

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 - \tfrac{3}{2} = 0 \\ y'(0) &= -c_1 - 2c_2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Als je dit lineaire stelsel oplost krijg je: $(c_1,c_2) = (2,-\frac{1}{2})$.

Het uiteindelijke antwoord wordt dus:

$$y(x) = 2e^{-x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x} + x - \tfrac{3}{2}$$